Polinomi e formule di Viète, Esercizi (19/08/2026)

1 Esercizi sui polinomi

Esercizio 1. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(1) = 1, p(2) = 4, p(3) = 9$. È possibile che $p(0) = 5$? (★)

Esercizio 2 (Olimpiadi della matematica, febbraio 2007)**.** Sia $p(x)$ un polinomio monico a coefficienti interi di grado 20. Sappiamo che, per tutti gli interi k con $1 \leq k \leq 20$, $p(k) = 2k$. Quali sono le ultime tre cifre di $p(21)$? (★)

Esercizio 3. Sia $p(x) = x^3 + x^2 + x + 6$ e $g(x)$ un polinomio a coefficienti interi. Dividendo $p(x)$ per $g(x)$ si ottiene quoziente $q(x)$ e resto $r(x)$ entrambi a coefficienti interi e di grado non nullo. Se $q(x) = r(x)$ quanto vale $g(36) + r(36)$? (★)

Esercizio 4. Trovare il resto della divisione di x^{100} per $x^2 - 3x + 2$. (★)

Esercizio 5 (Incontri olimpici, Montecatini 2014)**.** Dato un polinomio $p(x)$ a coefficienti interi, si sa che $p(0) = 5$ e $p(7) = -2$. Quanti valori può assumere $p(3)$ tra -100 e 100? (♣)

Esercizio 6. Siano $f(x),\ g(x)$ due polinomi di secondo grado e siano a, b, c, d quattro numeri reali distinti tali che $f(a) = 500,\ f(b) = 100,\ f(c) = 1000,\ f(d) = 2015$. Determinare $g(d)$ sapendo che $g(a) = 1519,\ g(b) = 1919,\ g(c) = 1019$. (♣)

Esercizio 7. Sia $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con a, b, c interi distinti e non nulli. Sapendo che $p(a) = a^3$ e $p(b) = b^3$ determinare $p(13)$. (♣)

Esercizio 8. Consideriamo il polinomio $p(x) = (3x - 1)^6$. Quanto vale la somma dei suoi coefficienti? E la somma dei coefficienti di indice dispari? (♠)

Esercizio 9. Dato il polinomio $p(x)$ di terzo grado tale che $p(0) = 0,\ p(1) = 1,\ p(2) = 2,\ p(3) = 4$. Quanto vale $p(4)$? (♠)

Esercizio 10. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi di grado 4 con $p(1) = 2,\ p(2) = 6$ $p(3) = 12,\ p(4) = 20,\ p(5) = 6$. Quanto vale $p(6)$? (★)

Esercizio 11. Siano $m(t) = t^6 - 12t^5 + 48t^4 - 64t^3 - 12t^2 + 48t - 9$ ed $l(t)$ il polinomio monico di sesto grado le cui radici sono i quadrati delle radici di $m(t)$. Determinare $l(4)$. (★)

2 Esercizi con le formule di Viète

Esercizio 12. Siano a e b radici del polinomio $2x^2 + 101x + 7$. Ricavare il valore di $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Esercizio 13. Siano a e b radici del polinomio $x^2 + 7x + 11$. Ricavare il valore di $a^2 + b^2$.

Esercizio 14. Siano a e b radici del polinomio monico di secondo grado $p(x)$. Se $p(a+1) = -3$ quanto vale $p(b+2)$?

Esercizio 15. Siano a e b radici reali del polinomio monico di secondo grado $p(x)$. Se $p(0) = 3$ quanto vale $\frac{p(a+b)-p(3)}{a+b-3}$?

Esercizio 16 (Stage Senior, 2023)**.** Il polinomio $2x^3 - 17x^2 + 23x - 4$ ha tre radici reali positive a, b, c. Determinare il volume del parallelepipedo rettangolo di spigoli $a + 2, b + 2, c + 2$. (★)

Esercizio 17. Se $p(x) = x^3 - 1001x + 2008$ e a, b, c sono le sue radici, quanto vale $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$? E $(a + b)^3 + (b + c)^3 + (c + a)^3$? (★)

Esercizio 18 (Gara a squadre femminile, 2023)**.** Siano $-1, -3, -4$ radici del polinomio $p(x) = x^4 - ax^2 + bx + c$. Quanto vale $ab + bc + ca$?

Esercizio 19 (Gara a squadre femminile, 2021)**.** Siano $p(x) = x^3-3x+1$ e $q(x) = x^3-6x^2+9x-1$ e sia r la maggiore delle radici reali di $p(x)$. Quanto vale $q(r^2)$?

Esercizio 20 (Olimpiadi della matematica, finale gara a squadre femminile, 2023)**.** Sia $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 256$ con a, b, c interi. Sapendo che $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 1$ trovare $f(5)$.

Esercizio 21 (Olimpiadi della matematica, semifinale gara a squadre mista, 2013)**.** Siano a, b, c radici del polinomio $p(x) = 2x^3 + 11x^2 - 427x + 414$. Quanto vale $p(a + b + c)$?

Esercizio 22 (Olimpiadi della matematica, finale gara a squadre mista, 2013)**.** Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 - 26x^2 + 203x - 541$. Quanto vale $(a + b)(b + c)(c + a)$?

Esercizio 23. Ricavare il risultato dell'espressione $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1}$, essendo x_1, x_2, x_3 le radici reali, non neccesariamente distinte, del polinomio di terzo grado $p(x)$ tale che $\frac{p(\frac{1}{2})+p(-\frac{1}{2})}{p(0)} = 1000$.

Esercizio 24 (Stage olimpico, Teramo 2011)**.** Siano a, b, c le radici del polinomio x^3-x^2+x+1. Determinare il valore di $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. (♣)

Esercizio 25 (Giochi di Archimede Triennio, 2014)**.** Sapendo che $2x^4+5x^3-21x^2+5x+2 = 0$ ha 4 soluzioni reali a, b, c, d, quanto vale $a + b + c + d - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d})$? (♣)

Esercizio 26. Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 + 5x - 2021$. Calcolare $a^3 + b^3 + c^3$. (♣)

Esercizio 27. Siano $a < b < c$ le tre radici reali dell'equazione $3x^3 - 35x^2 + 50 = 0$. Determina il valore dell'espressione $E = \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}$. (♣)

Esercizio 28. Siano a, b, c le radici del polinomio $x^3 - 4x^2 + 5x - 1,9$. Determinare l'area del triangolo di lati a, b, c. (♣)

Esercizio 29 (Olimpiadi della matematica, gara individuale nazionale del 2002, problema 4)**.** Determinare per quali valori di n tutte le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x + n = 0$ sono numeri interi. (♠)

Esercizio 30. Dato il polinomio $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - k$, determinare i valori della costante k in modo tale che $p(x)$ abbia una radice doppia. (★)